Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 109, Nº. 1–2, pp 107–126, 2016
XIX Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica

Miguel Ángel Fernández Sanjuán

Académico Correspondiente

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid

Departamento de Física. Universidad Rey Juan Carlos

RESUMEN

La noción de dinámica ha evolucionado con el tiempo. Ahora cuando hablamos de dinámica, no solo entendemos el movimiento de los cuerpos celestes y los sistemas mecánicos sólidos, sino cualquier cambio con respecto al tiempo de una o varias variables. Desde ese punto de vista podemos encontrar dinámica por todas partes, en cualquier campo de la ciencia. En esta perspectiva más general, se pueden incluir los movimientos de la bolsa y las variables económicas, el cambio de la concentración de substancias en reacciones químicas, cambios en las variables fisiológicas en biología y medicina, el movimiento de los potenciales de acción de las neuronas, etc., lo que proporciona una visión de carácter más interdisciplinar.

Las diferentes interacciones entre las partes que constituyen un sistema físico y sus correspondientes mecanismos de retroalimentación, constituyen una fuente de no linealidad y complejidad, que añadido a la dependencia sensible a las condiciones iniciales, característico del comportamiento caótico, conllevan un cambio de perspectiva de los sistemas dinámicos con importantes consecuencias en la comprensión de la ciencia.

En este artículo se ofrece una perspectiva histórica de la dinámica no lineal, la teoría del caos y los sistemas complejos, donde se incluyen algunas de las diferentes fuentes que han contribuido a la construcción de la disciplina tal y como la conocemos a día de hoy. Entre ellas, el problema de los tres cuerpos y la mecánica celeste, la turbulencia y la dinámica de fluidos, la irreversibilidad y los fundamentos de la física estadística; o la ecuación logística y la dinámica de poblaciones en biología. Numerosas escuelas de matemáticas y física han jugado un papel esencial en el desarrollo histórico de la materia, entre las que se incluyen la escuela francesa, la rusa, la japonesa y la americana. El conocimiento de esta perspectiva histórica permite comprender la amplitud de la disciplina en sí misma y de las múltiples aplicaciones interdisciplinares a los diversos campos de las ciencias.

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica no lineal es la disciplina que tiene por objeto el estudio de los sistemas dinámicos no lineales, que son aquellos sistemas definidos por una o más variables y que evolucionan con el tiempo en los cuales la respuesta no es proporcional al estímulo. El caos es uno de las tres clases de movimiento, además de los movimientos periódico y cuasi periódico. Como es natural, existen tantos sistemas dinámicos como variables que tienen una evolución temporal, lo que nos da idea de la naturaleza interdisciplinar y del alcance de la dinámica no lineal [1-4].

Muchas de las ideas y conceptos de la complejidad, como ciencia de los sistemas complejos, suponen un auténtico reto para la integración de diversas disciplinas, entre las que hay que señalar a la dinámica no lineal y la teoría del caos, la física estadística, la teoría de procesos estocásticos, la teoría de la información, la teoría de redes, las ciencias de la ingeniería, ciencias de la vida y las ciencias de la computación. Este listado naturalmente no es completo, pero da una idea del reto que hay detrás de la idea de la complejidad. Esta idea pretende significar algo más que la idea de cruzar las fronteras disciplinares, sino más bien integrar.

Se viene hablando mucho en los últimos años de diálogo entre diferentes disciplinas científicas, no solamente para resolver viejos problemas, sino también como fuente de inspiración de nuevos problemas. Para el estudio de la complejidad éste es uno de los elementos fundamentales, pues su objeto de estudio abarca problemas relacionados tanto con las llamadas ciencias duras como con las blandas. Sistemas complejos existen en biología, en química, en física, en sociología, en economía, etc. En cualquier caso, sigue faltando el verdadero diálogo entre disciplinas necesario para el avance en el conocimiento de los sistemas complejos en particular y de la ciencia en general.

Existen diferentes caminos que han llevado a la comprensión del caos tal y como lo entendemos a día de hoy. De entre estos diferentes caminos me gusta señalar: (1) La aplicación logística y la dinámica de las poblaciones (2) Los osciladores no lineales (3) El problema de los tres cuerpos y la mecánica celeste (4) La turbulencia y la dinámica de los fluidos y (5) La irreversibilidad y la mecánica estadística. De todos ellos se hablarán a lo largo de este artículo.

2. DINÁMICA NO LINEAL Y CAOS DETERMINISTA

Como se ha comentado anteriormente, la dinámica es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de diferentes magnitudes, es decir su movimiento. Básicamente existen tres tipos de movimientos: los estacionarios y de equilibrio; los periódicos y cuasi periódicos; y por último, los caóticos. Considerando en sentido amplio la noción de movimiento, es fácil de comprender que podamos encontrar sistemas dinámicos en cualquier disciplina científica. Es por ello por lo que se acostumbra a decir que una de las características de la dinámica no lineal sea su interdisciplinariedad, ya que con sus métodos podemos abordar el estudio de muchos fenómenos diferentes que evolucionan con el tiempo.

Usamos el término “no lineal” para contraponerlo lógicamente al término “lineal”, ya que la aproximación lineal es la que tradicionalmente se ha usado en la ciencia debido a su sencillez matemática. La aproximación lineal lleva implícito asumir propiedades tales como: (1) Proporcionalidad: pequeñas causas provocan pequeños efectos (2) Aditividad: el todo es igual a la suma de las partes (3) Replicación: la misma acción en las mismas condiciones producen el mismo resultado y (4) Relaciones claras entre causa y efecto: basta conocer un poco acerca del comportamiento de un sistema para conocerlo por completo.

Sin embargo, cuando las relaciones de la naturaleza no son lineales nos lleva a situaciones muy diferentes. Una relación de proporcionalidad entre dos variables x e y, donde $y = kx$, indica una relación lineal. Por tanto, toda relación entre dos variables que no responde a una relación de proporcionalidad como la anterior será no lineal. Es fácil ver que lo más general es que un sistema dinámico sea no lineal.

Pues bien, cuando existen relaciones de no linealidad, puede darse un comportamiento caótico que presenta las siguientes propiedades: (1) No hay proporcionalidad: pequeñas causas pueden provocar grandes efectos (2) Emergencia: no existe la aditividad, de modo que el todo es mayor que la suma de las partes (3) Dependencia sensible a las condiciones iniciales: lo que puede llevar a que nunca se pueda reproducir de modo exacto el mismo experimento; y por último (4) La no linealidad puede generar inestabilidades, discontinuidades e imprevisibilidad, lo que hace necesario la flexibilidad, la adaptabilidad, el cambio dinámico, la innovación y la capacidad de reacción.

Posiblemente una de las ideas más profundas acerca de la naturaleza de lo que se conoce como comportamiento caótico, sea la idea de dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, las trayectorias de un sistema caótico se alejan una de otra a medida que avanza el tiempo cuando parten de puntos iniciales muy próximos. Este hecho tiene consecuencias muy drásticas en la capacidad de predicción de un sistema.

Resulta sorprendente leer a Charles Darwin en el capítulo XIV de *El Orígen de las Especies* (1859) [5] la frase:

"Nacen más individuos que los que pueden sobrevivir. Un grano en la balanza puede determinar qué individuos hayan de vivir y cuales hayan de morir, qué variedad o especie haya de aumentar en número de individuos y cual haya de disminuir o acabar por extinguirse",

que esconde la verdadera noción de dependencia sensible a las condiciones iniciales.

A este respecto también resulta interesante traer a colación un famoso verso tradicionalmente asociado a Benjamin Franklin, si bien antecedentes de la misma idea la hacen remontar al siglo XV, y que se conoce como "Por culpa de un clavo…"("For Want of a Nail").

Fig. 1. La rima "Por culpa de un clavo…" ofrece una imagen intuitiva y poética de la idea de dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es la huella del movimiento caótico.

Podemos definir el comportamiento caótico o el caos como un tipo de movimiento que se deriva de una dinámica temporal determinista de sistemas sencillos que de hecho pueden describirse en términos de pocas variables y cuyas características fundamentales son: (1) Ser irregular en el tiempo, y dado su carácter no lineal, por supuesto, no puede ser la superposición de movimientos periódicos, siendo de hecho de naturaleza aperiódica y acotada, (2) Ser imprevisible a largo plazo y muy sensible a las condiciones iniciales y (3) Ser complejo, pero ordenado en el espacio de las fases, presentando una geometría de naturaleza fractal. Si comparamos el movimiento caótico con el movimiento regular, podemos decir que el movimiento regular es repetitivo, periódico, previsible y con una geometría sencilla, mientras que el movimiento caótico es irregular, imprevisible y de una geometría complicada.

Existen distintos tipos de movimientos caóticos. Fundamentalmente se llama *caos permanente* cuando una vez que un sistema dinámico encuentra este estado permanece en él para siempre. Por otro lado, se llama *caos transitorio* cuando este comportamiento caótico ocurre únicamente en un determinado periodo de tiempo y posteriormente el sistema pasa a comportarse de otro modo. Además, los sistemas dinámicos generalmente se suelen distinguir entre disipativos y conservativos en función de si conservan o no la energía. Pues bien, para los sistemas disipativos el caos permanente ocurre en lo que se llama un atractor caótico en el espacio de las fases. Sin embargo, en el caso del caos transitorio se producen transitorios caóticos en un conjunto fractal. En el caso conservativo, por un lado el caos permanente se produce en regiones acotadas del espacio de las fases y el caos transitorio se asocia por ejemplo al fenómeno de la dispersión caótica que se da en numerosos fenómenos físicos, dando lugar a estructuras fractales muy complejas. Estos conceptos se explicarán con más detalle a lo largo del artículo.

Los sistemas dinámicos se suelen clasificar en discretos y continuos en función de si el tiempo se mide de modo discreto o continuo. Un paradigma de sistema dinámico discreto es la aplicación logística, definida como

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

que se trata de una ecuación iterativa donde el índice *n* señala una iteración que está ligada al modo discreto de medir el tiempo. La Fig. 2 muestra un diagrama de bifurcaciones de Feigenbaum correspondiente a la aplicación logística, donde se visualiza el estado final del sistema en función de la variación del parámetro *r*.

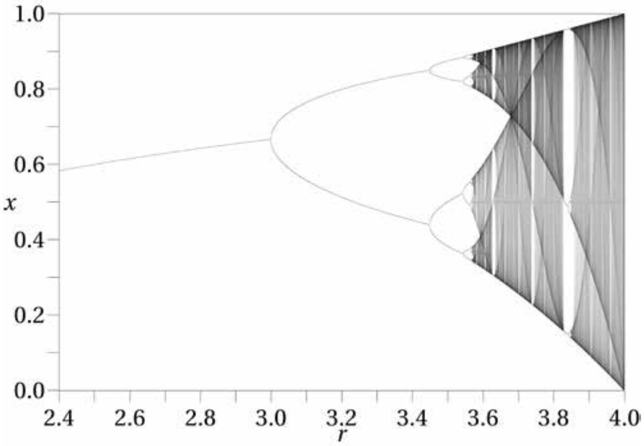

Fig. 2: Diagrama de bifurcaciones de Feigenbaum correspondiente a la aplicación logística. Indica como el estado final del sistema varía en función del valor del parámetro ***r*.**

Un paradigma de sistema continuo es el péndulo simple (Fig. 3). Consiste en un cuerpo de masa *m* que cuelga de un hilo en principio inextensible y de masa despreciable, que tiene un movimiento periódico con respecto al punto de suspensión.

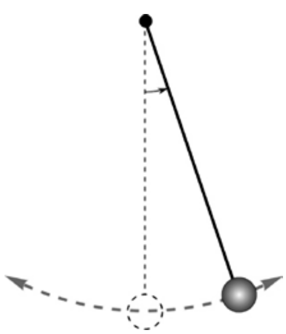

Fig. 3. Movimiento oscilatorio de un péndulo.

En este sistema el tiempo se mide de modo continuo, y por tanto se puede modelizar, una vez normalizada, mediante una ecuación diferencial tal y como

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = F\cos\omega t$$

Esta ecuación contiene además del término de inercia (la segunda derivada de la posición), la fricción de intensidad μ que es proporcional a la velocidad, el término no lineal sinusoidal y un forzamiento periódico de amplitud F. Si tenemos en cuenta la fricción con el aire y asumiendo que el punto de suspensión permanece inmóvil, entonces el movimiento se va a amortiguar paulatinamente hasta que se para en su posición de equilibrio estable. Cuando se introduce una fuerza externa periódica en el sistema, tiene como efecto introducir energía en el sistema, provocando que se mantengan las oscilaciones. Sin embargo, también es posible dar lugar a otro tipo de movimiento de naturaleza irregular e irrepetible de modo periódico que es el movimiento caótico.

La Fig. 4. indica la evolución de la velocidad a medida que aumenta el tiempo de un movimiento del péndulo. En una de ellas claramente se puede observar el carácter periódico de las oscilaciones, esto es, al cabo de un cierto periodo de tiempo se repite el mismo movimiento. En la otra se muestra sin embargo un comportamiento irregular, que resulta ser caótico, donde se puede observar que no se reproduce el mismo tipo de movimiento al cabo de ningún periodo de tiempo. Esta es precisamente una de las características del movimiento caótico, su falta de periodicidad.

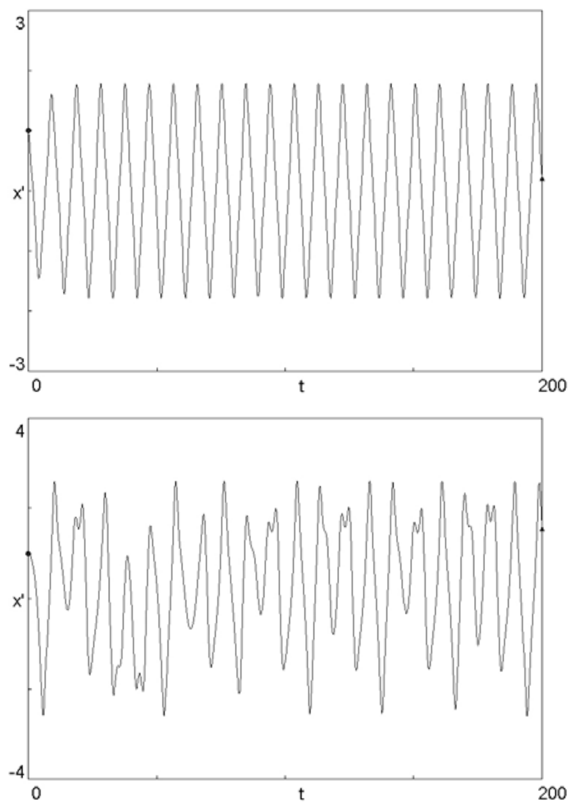

Fig. 4. Evolución de la velocidad con el tiempo para un movimiento periódico y uno caótico.

Un ejemplo sencillo de sistema periódico es el sistema masa-muelle formado por un cuerpo que se encuentra unido mediante un muelle a una pared (Fig. 5). Si el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio es muy pequeño, entonces la fuerza de recuperación del muelle es proporcional (lineal) al desplazamiento, de modo que el resultado del movimiento es un movimiento regular, oscilatorio y periódico.

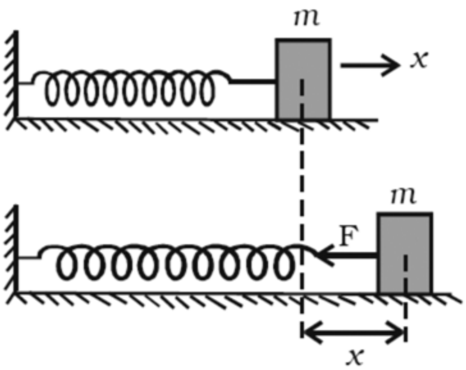

Fig. 5. Movimiento oscilatorio de un sistema formado por un cuerpo de masa M unido a un muelle.

Cuando la deformación es mayor, la fuerza de recuperación del muelle no es lineal, dando lugar a respuestas irregulares del muelle. En esta situación, los movimientos resultantes pueden ser muy irregulares, pudiendo ser de naturaleza caótica donde no hay regularidades, ni periodicidades y donde la capacidad de predicción a largo plazo se pierde.

El sistema de Lorenz es uno de los sistemas caóticos más estudiados. La Fig. 6 muestra un atractor caótico del sistema de Lorenz en el espacio de las fases. Fue introducido por el meteorólogo Edward Lorenz para estudiar la convección térmica en un fluido y mediante simulaciones numéricas por ordenador pudo observar la propiedad de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, huella del comportamiento caótico.

Fig. 6. La figura representa el atractor caótico del sistema de Lorenz.

La Fig. 7 muestra la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales en el sistema caótico de Lorenz. La figura muestra la evolución temporal en el espacio de las fases de dos órbitas (una roja y una azul) cuya condición inicial es muy próxima, Al cabo de un cierto tiempo, aproximadamente 24 unidades temporales, las correspondientes órbitas comienzan a alejarse, resultando muy diferentes a largos tiempos.

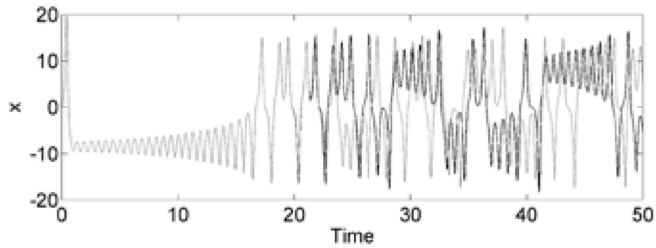

Fig. 7. Evolución temporal en el espacio de las fases de dos órbitas del sistema de Lorenz inicialmente muy cercanas, donde se muestra la propiedad de la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Una herramienta muy importante en la dinámica no lineal es la noción geométrica de espacio de las fases. La noción de espacio de fase [6] se atribuye al físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), que fue uno de los pioneros de la teoría cinética y es también considerado uno de los padres fundadores de la mecánica estadística, término que también acuñó. El concepto de espacio de fase juega un papel crucial en la dinámica no lineal, de cuyo análisis podemos obtener mucha información sobre un sistema dinámico dado.

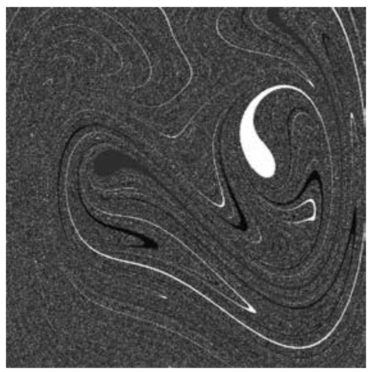

Fig. 8. Estructuras fractales en el espacio de las fases de un oscilador no lineal caótico. Las variables del espacio de las fases son la posición en el eje x y la velocidad en el eje y.

Estudiar el espacio de fases de un determinado sistema dinámico permite obtener estructuras fractales complejas cuyas consecuencias físicas se plasman en la incertidumbre a la hora de determinar el estado ulterior del sistema (Fig. 8).

3. UNA VISION HISTORICA DE LA DINAMICA NO LINEAL

A lo largo del siglo XIX aparecieron ciertas limitaciones en torno al mito del determinismo. Por un lado, resulta imprescindible tener un conocimiento completo de las condiciones iniciales del problema. Y por otro lado surgieron notables dificultades a la hora de resolver la dinámica de un sistema físico formado por un gran número de partículas. Esto último hizo que se introdujeran conceptos relacionados con la teoría de la probabilidad en el estudio de las leyes físicas de sistemas formados por muchas partículas, como los gases, los líquidos y los sólidos, dando lugar al nacimiento de la mecánica estadística. Entre los padres fundadores de la disciplina cabe mencionar a Ludwig Boltzmann (1844-1906), Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y James Clerk Maxwell (1831-1879).

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), es fundamentalmente conocido por haber unificado las leyes de la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, sus contribuciones a la física han sido de las más prolíficas de la historia. Entre su magna obra científica, es importante mencionar que se le considera el padre de la automática y de la mecánica estadística. Sin embargo, es muy desconocido el papel que jugó en el desarrollo de la moderna teoría del caos.

Precisamente en uno de sus escritos: *Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of the will?* de una conferencia que impartió en Cambridge, el 11 de febrero de 1873 son los siguientes extractos que muestran hasta qué punto Maxwell era conocedor de la idea de dependencia sensible a las condiciones iniciales, de la que hemos hablado anteriormente.

"Cuando el estado de las cosas es tal que una variación infinitamente pequeña del estado presente altera solo una cantidad infinitamente pequeña el estado del futuro, que la condición del sistema, esté en reposo o en movimiento, se dice estable; pero cuando una variación infinitamente pequeña del estado presente aporta una diferencia finita en el estado del sistema en un tiempo finito, la condición del sistema se dice inestable. Es claro que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de futuros eventos, si nuestro conocimiento del estado presente es solo aproximado y no exacto."

Debido a las enormes consecuencias sobre el determinismo en física que la mecánica cuántica ha aportado a través del principio de indeterminación de Heisenberg, la idea del indeterminismo ha sido directamente relacionada con la mecánica cuántica. Lo que de algún modo ha llevado a considerar a la mecánica clásica como completamente determinista y predecible, lo cual no es del todo cierto [7].

Resulta fascinante corroborar que la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales fue considerada en detalle por el físico alemán Max Born (1882-1970), Premio Nobel de Física en 1954, en un artículo titulado *Is Classical Mechanics in fact deterministic?* [8]. En él presentaba un estudio de un gas de Lorentz en dos dimensiones inicialmente propuesto por el físico holandés Hendrik A. Lorentz (1853-1928) en 1905 como un modelo para el estudio de la conductividad eléctrica en metales. En este modelo, una partícula se mueve en un plano que está lleno de esferas duras y que chocan con ellas de modo que un pequeño cambio en las condiciones iniciales va a alterar de modo considerable la trayectoria de la partícula. Este hecho llevó a Born a concluir que el determinismo tradicionalmente relacionado con la mecánica clásica no es real, pues no es posible conocer con precisión infinita las condiciones iniciales de un experimento físico.

Además, en el discurso que pronunció con motivo de la concesión del Premio Nobel en 1954 aparecen las siguientes palabras:

"La Mecánica Newtoniana es determinista en el siguiente sentido: Si el estado inicial (posiciones y velocidades de todas las partículas) de un sistema se conoce de modo preciso, entonces el estado en otros instantes (antes o después) se puede calcular de las leyes de la mecánica. Todas las otras ramas de la física clásica han sido construidas de acuerdo a este modelo. El determinismo mecánico se convirtió gradualmente en una especie de artículo de fe: el mundo como una máquina, un autómata. En mi opinión esta idea no ha tenido antecedentes en la filosofía antigua y medieval. La idea es un producto del inmenso éxito de la mecánica newtoniana, particularmente en la astronomía. En el siglo XIX se convirtió en un

principio filosófico básico para todas las ciencias exactas. Me pregunté a mi mismo si esto estaba realmente justificado. ¿Se pueden realmente hacer predicciones absolutas para todo momento en la base de las ecuaciones clásicas del movimiento? Se puede ver fácilmente, mediante ejemplos sencillos, que esto solamente ocurre cuando se da la posibilidad de una medida completamente exacta (de la posición, la velocidad u otras cantidades). Pensemos en una partícula que se mueve sin fricción en una línea recta entre dos paredes, en las que experimenta un choque completamente elástico. Se mueve con velocidad constante igual a su velocidad inicial hacia adelante y hacia atrás, y se puede conocer de modo exacto donde estará en cualquier momento si conocemos de modo preciso la velocidad. Pero si se permitiera una pequeña imprecisión en la velocidad, entonces la imprecisión en la predicción de la posición en cualquier instante aumentaría con el tiempo. Si uno espera suficiente tiempo, entonces la imprecisión se habrá convertido en la distancia total entre las paredes. Por tanto, es imposible predecir nada acerca de la posición en un tiempo suficiente largo. Por tanto el determinismo se convierte en indeterminismo desde el momento en que se permite la menor imprecisión en los datos de la velocidad."

El físico americano Richard Feynman (1918-1988), Premio Nobel de Física en 1965 (Fig. 9) hace unas reflexiones similares en su conocido libro *Lecciones de Física* [9], donde explica que el indeterminismo no pertenece exclusivamente a la mecánica cuántica, sino que es una propiedad básica de muchos sistemas físicos.

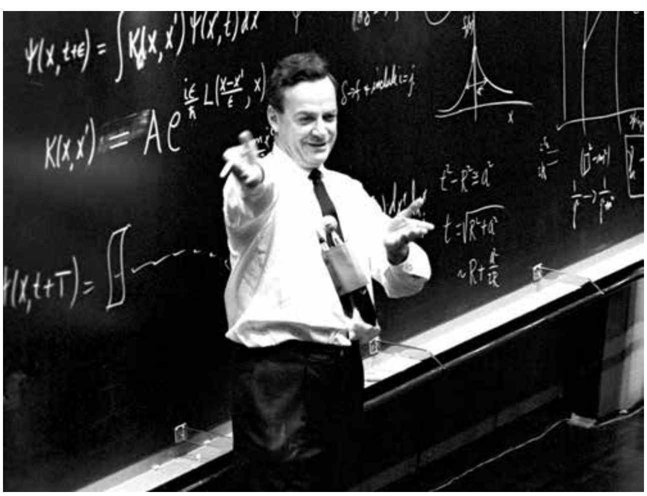

Fig. 9. Richard Feynman (1918-1988), Premio Nobel de Física en 1965.

En la sección 38-6, titulada "Implicaciones filosóficas", del primer volumen de sus *Lecciones de Física* se hace una descripción magistral del indeterminismo en mecánica clásica. La idea fundamental es la imprecisión a la hora de fijar con exactitud las condiciones iniciales para predecir el estado final de un sistema físico. Afirmando finalmente: "Porque en mecánica clásica ya había indeterminismo desde un punto de vista práctico".

3.1. Poincaré, el problema de los tres cuerpos y el nacimiento del caos

Para entender el problema de los tres cuerpos, nos remontamos a los inicios de la ciencia moderna con los trabajos de Isaac Newton sobre el campo gravitatorio y la ley universal de la gravitación. El llamado problema de los dos cuerpos básicamente consiste en analizar el movimiento de un sistema formado por dos cuerpos que se atraen mutuamente bajo la acción de las fuerzas gravitatorias. Newton resuelve el problema, reduciendo el movimiento de los dos cuerpos al movimiento de cada uno de ellos alrededor del llamado centro de masas, que es un punto cuya masa es la masa total del sistema.

Posteriormente se intentó resolver el problema de los tres cuerpos, que se puede formular de una manera sencilla: Sean 3 cuerpos de masas arbitrarias m_1, m_2 y m_3, que se atraen mutuamente mediante la ley de gravitación de Newton. Asumiendo que pueden moverse libremente en el espacio tridimensional y con condiciones iniciales arbitrarias, determínese la evolución del movimiento.

A pesar de la sencillez de su formulación, su resolución ha provocado verdaderos quebraderos de cabeza a muchos científicos. Entre ellos cabe destacar a Isaac Newton (1642-1727), Alexis Clairaut (1713-1765), Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Carl Jacobi (1804-1851), George Hill (1838-1914) y Henri Poincaré (1854-1912).

Es precisamente este último quien escribe una famosa memoria en 1889 *Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica,* tras ganar el premio del concurso sobre la estabilidad del Sistema

Solar que había convocado el Rey Oscar II de Suecia y Noruega con motivo de su 60 aniversario. Esta competición [10] había sido propuesta por el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler, quien había recibido del matemático alemán Karl Weiertrass, que había sido su maestro, la idea de que los concursantes escribieran un trabajo original afrontando una de cuatro cuestiones. Una de las cuatro cuestiones de Weiertrass tenía que ver con la Mecánica Celeste. La pregunta nació de una sugerencia formulada por el matemático de la Universidad de Göttingen, Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quien en 1858 había contado a su estudiante Leopold Kronecker que había descubierto un nuevo método de resolver ciertas ecuaciones diferenciales y apuntó a que aplicándolas a las ecuaciones de la mecánica celeste podría probar con todo rigor que el sistema solar era estable. El comité que evaluó tal competición estuvo formado por los matemáticos Karl Weiertrass, el francés Charles Hermite y el sueco Gösta Mittag-Leffler.

Posteriormente, en 1892, Poincaré publicó su magna obra *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* (Fig. 10) en tres volúmenes donde aparecen numerosos conceptos nuevos que han dado lugar al desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos, como acostumbran a llamarla los matemáticos o dinámica no lineal, término éste más usado por los físicos, así como a otras disciplinas matemáticas como la topología. Poincaré es considerado como uno de los padres de la teoría del caos, ya que muchas ideas fundamentales de la teoría están contenidas en este libro.


LES MÉTHODES NOUVELLES

MÉCANIQUE CÉLESTE

H. POINCARÉ

TOME I.

PARIS,

1892

Fig. 10. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste fue publicado por Henri Poincaré en 1892.

El problema general de los tres cuerpos es de una dificultad enorme y solo en los últimos años se han realizado avances notables, sin llegar a ser definitivos. Existe sin embargo un caso que recibe el nombre de restringido, circular y plano que es el que ha sido estudiado por muchos de los científicos a los que me he referido anteriormente. Fundamentalmente se considera que el sistema no está formado por tres masas cualesquiera, sino que una de ellas se considera mucho mayor que las demás y la tercera de ellas es de masa despreciable frente al resto. La analogía sin duda proviene de considerar sistemas como el Sol, la Tierra y la Luna, o la Tierra, la Luna y un satélite, donde la aproximación de moverse asimismo en un plano es correcta. En estas circunstancias y con un sistema de referencia apropiado, se pueden encontrar sin dificultad las ecuaciones del movimiento, de las cuales se deriva un potencial que nos da idea de las posiciones de equilibrio en las que se puede encontrar un tercer cuerpo. Se trata de cinco posiciones de equilibrio que encontró Lagrange, por lo que se conocen actualmente como los *puntos de Lagrange* (Fig. 11).

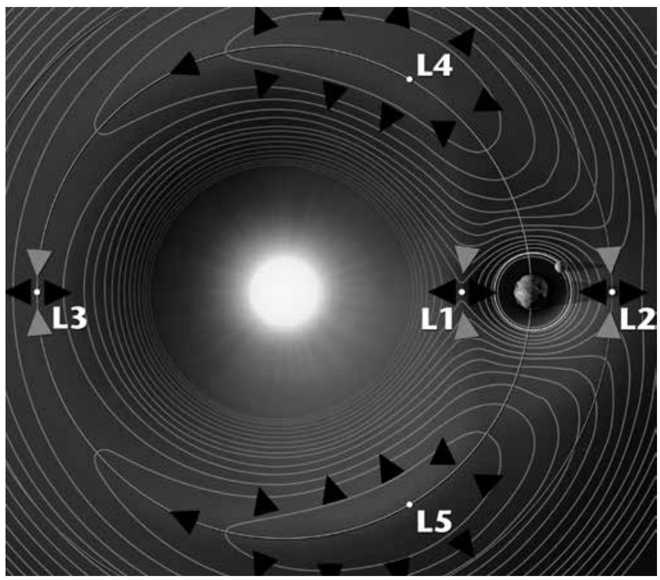

Fig. 11. La figura muestra las curvas equipotenciales del problema restringido de los tres cuerpos, en este caso, Sol-Tierra-Luna donde aparecen los cinco puntos de Lagrange.

El conocimiento de los puntos de Lagrange es de una gran utilidad. De hecho en el punto L1 está situado el Solar and Heliospheric Observatory (SOHO), que es una sonda espacial para estudiar el Sol. En el punto de Lagrange L2 se posicionó la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) para el estudio de la radiación de fondo de microondas del universo, consiguiendo que permanezca en su lugar con un gasto mínimo de combustible, manteniendo siempre sus sensores apuntando lejos de la Tierra y del Sol. En el año 2021, se prevé lanzar el James Webb Space Telescope (JWST), que es un observatorio espacial en fase de desarrollo que estudiará el cielo en frecuencia infrarroja, y que orbitará alrededor del punto L2 de Lagrange.

Como se ha apuntado más arriba, Poincaré no abordó el problema de los tres cuerpos de modo general, sino que se centró en estudiar lo que se conoce como "problema restringido de los tres cuerpos", que es un caso particular en el cual se considera que una de las masas es muy pequeña con respecto a las demás. En este estudio encontró lo que él llamó órbitas doblemente asintóticas u homoclínicas, que se caracterizan por poseer en el espacio de las fases un punto homoclínico. La presencia de uno de estos puntos tiene implicaciones muy serias en la complejidad dinámica del sistema. Tras abordar el estudio del problema, Poincaré llegó a escribir:

> *"Uno queda impactado por la complejidad de esta imagen que ni siquiera me atrevo a dibujar. Nada puede darnos una idea mejor de la complejidad del problema de los tres cuerpos, y en general de todos los problemas de la dinámica...."*

Y es que a la hora de intentar resolver este problema creó un método o una aproximación geométrica mediante la cual entrevió que este problema tenía una dinámica muy compleja que es básicamente lo que ahora llamamos caos determinista.

Fig. 12. El matemático y físico francés Henri Poincaré (1854-1912)

La influencia de Poincaré (Fig. 12) en el desarrollo de los sistemas hamiltonianos es enorme y en este sentido es interesante mencionar que su testigo lo tomó el matemático americano George David Birkhoff (1884-1944), quien acuñó el término sistemas dinámicos, y a su vez tuvo una enorme influencia en Edward Lorenz quien redescubriría la dependencia sensible a las condiciones iniciales a mediados del siglo XX.

Dentro de esta corriente de pensamiento, y en el contexto americano, es necesario mencionar al matemático Steven Smale (Fig. 13), merecedor de la medalla Fields en 1966 por sus grandes contribuciones a la teoría de sistemas dinámicos. A él se debe precisamente el concepto de herradura de Smale, que fue un paso importante en la comprensión de la relación entre la existencia de un punto homoclínico y la noción de caos determinista, a través de la idea sencilla de la dinámica simbólica usando la llamada aplicación del desplazamiento de Bernoulli.

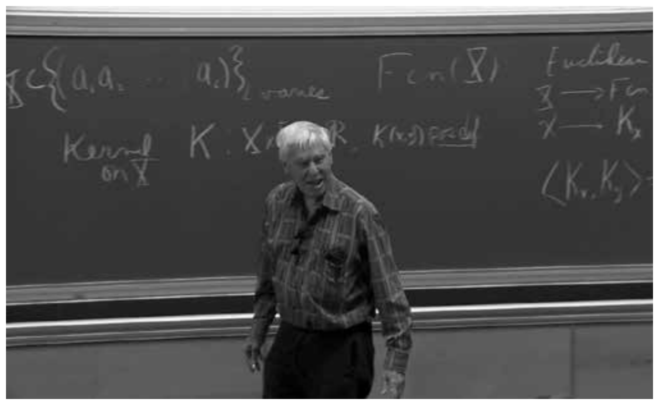

Fig. 13. Steve Smale.

En cuanto a la tradición rusa hay que remontarse a Alexander M. Lyapunov (1857-1918), que había sido estudiante de doctorado del famoso matemático Pafnuti L. Chebychev (1821-1894), y cuya tesis sobre la estabilidad del movimiento ha ejercido una influencia enorme en la Física. De Lyapunov hemos heredado conceptos tales como el de estabilidad de los sistemas dinámicos y también los útiles exponentes de Lyapunov, que nos sirven para caracterizar cuando un sistema dinámico dado es o no caótico.

Una de las principales escuelas dentro de la tradición rusa es la de Leonid I. Mandelstam (1879-1944), continuada por sus discipulos Alexander A. Andronov (1901-1952) y Lev S. Pontryagin (1908-1988). Otra escuela clave dentro de esta misma tradición es la de Andrei N. Kolmogorov (1903-1987). Todos ellos desarrollaron métodos nuevos e hicieron contribuciones notables a la construcción de la dinámica no lineal tal y como la conocemos hoy en día.

En el año 1954, en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam, Kolmogorov enunció un teorema para sistemas hamiltonianos que fue demostrado posteriormente por su estudiante Vladimir I. Arnold y por el alemán Jürgen Moser (1928-1999), que ha resultado ser de una importancia considerable. A dicho teorema se le conoce actualmente como teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [11] y tiene que ver con el problema de la estabilidad de los toros invariantes en los sistemas integrables de la mecánica hamiltoniana bajo la acción de pequeñas perturbaciones.

Este trabajo, de hecho, enlaza de manera natural con los trabajos pioneros de Poincaré sobre mecánica celeste, ya que éste había puesto de manifiesto la idea de la complejidad de las órbitas en el problema de los tres cuerpos, y el teorema KAM se puede considerar como una culminación de estas ideas. Como ya vimos, la estabilidad del sistema solar es un problema de especial importancia en la mecánica celeste y el teorema KAM muestra que bajo ciertas condiciones esas órbitas se mantienen confinadas en ciertas regiones.

3.2 COMPLEJIDAD EN EL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

El fenónemo de la turbulencia en el movimiento de fluidos es uno de los casos más espectaculares de comportamiento caótico. Aunque las ecuaciones fundamentales del movimiento de un fluido, las ecuaciones de Navier-Stokes, se conocen desde finales del siglo XIX, conviene recordar que aún no se conoce la forma de sus soluciones en régimen turbulento.

En 1963 el meteorólogo del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) Edward Lorenz (Fig. 14) desarrolló un modelo de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico. A la hora de encontrar soluciones numéricas con ayuda de un ordenador se encontró de nuevo con el fenómeno de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, el sistema era inherentemente impredecible, de tal modo que pequeñas variaciones en la determinación de las condiciones iniciales llevaban a soluciones drásticamente diferentes.

En ese momento muy pocos dieron importancia a este hecho, tal vez porque los resultados del trabajo de Lorenz se publicaron con un título algo críptico, *"Deterministic Nonperiodic Flow",* [12] en una revista de meteorología y pasaron inadvertidos para muchos científicos.

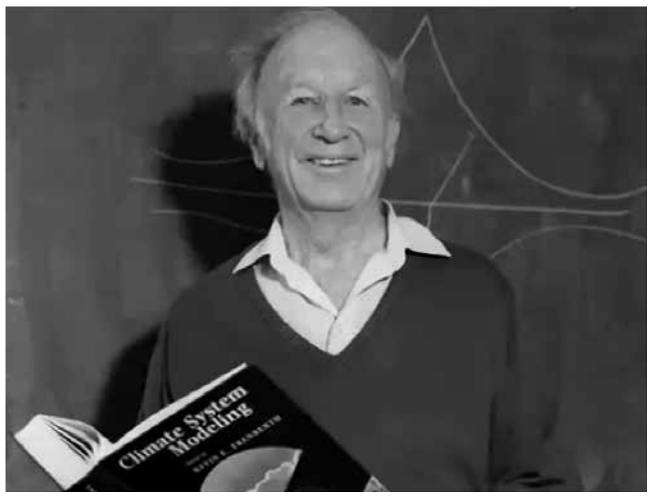

Fig. 14. Edward Norton Lorenz (1917–2008).

La teoría del físico ruso Lev D. Landau, y del alemán Eberhard Hopf que proponía la existencia de un conjunto infinito de frecuencias inconmensurables para explicar la turbulencia, fue superada en la década de los setenta por las aportaciones teóricas de David Ruelle y Floris Takens, quienes introdujeron en 1971 el concepto fundamental de atractor extraño. Se trata de un objeto geométrico de carácter atractor, diferente a los anteriormente conocidos casos de puntos fijos periódicos, cuasiperiódicos o ciclos límite, de ahí el nombre de "extraño", y que además posee una dimensión no entera o fraccionaria (fractal). Por otro lado, el desarrollo de la geometría fractal iniciado por Benoit Mandelbrot [13], que había sido estudiante del matemático francés Gaston Julia, ha jugado un papel fundamental en la comprensión y análisis del comportamiento complejo de los sistemas dinámicos no lineales. En cualquier caso conviene no olvidar el papel jugado en muchos aspectos del desarrollo de la dinámica no lineal por el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918),

Fig. 15. Conjunto de Cantor.

en particular en lo que se refiere al conjunto de Cantor (Fig. 15) y su constante aparición en multitud de problemas dinámicos. Se hablará de esto con algo más de detalle en la sección 3.6.

3.3 MECANICA ESTADÍSTICA, ORIGEN DE LA IRREVERSIBILIDAD Y TEORÍA ERGÓDICA

La mecánica estadística constituye una parte esencial de la física teórica cuya finalidad consiste en describir las propiedades macroscópicas de un sistema muy grande de partículas en términos de sus propiedades promediadas. Se trata de una disciplina que combina las leyes básicas de la dinámica para un sistema de partículas junto con las leyes de la estadística, especialmente las que conciernen a la ley de los grandes números. El descubrimiento del caos determinista ha estimulado a algunos físicos a reconsiderar desde una nueva perspectiva los fundamentos de la mecánica estadística. Eso es debido a que el caos determinista implica que no sólo los sistemas con un gran número de partículas, sino que incluso sistemas deterministas con muy pocos grados de libertad pueden presentar comportamientos que requieren de herramientas estadísticas para su estudio. Son muchos los esfuerzos que se han realizado durante este último siglo a la hora de dar una correcta interpretación de los orígenes dinámicos de la irreversibilidad. A pesar de todos los esfuerzos realizados hasta el presente, sigue sin existir un acuerdo general sobre cuáles son los ingredientes fundamentales que se necesitan para fundamentar la mecánica estadística.

El problema de la irreversibilidad fue una de las grandes preocupaciones de uno de los “padres fundadores” de la mecánica estadística, el físico vienés Ludwig Boltzmann (1844-1906). La objeción planteada por Josef Loschmidt (1821-1895) al programa de Boltzmann, consistente en derivar las leyes de la termodinámica directamente del comportamiento mecánico, puso de manifiesto lo paradójico de una situación en la que, mientras las leyes de la mecánica son reversibles bajo inversión temporal, el comportamiento termodinámico de los sistemas es fundamentalmente irreversible. Sin duda ha habido grandes avances en este siglo en el intento de clarificar el origen dinámico de las ecuaciones cinéticas, aunque el problema, en cierta medida, permanece abierto. Siguiendo a Boltzmann, los primeros intentos de fundamentar la mecánica estadística clásica se basaban en la supuesta validez de la hipótesis ergódica, lo que tras la realización de esfuerzos teóricos notables condujo a un verdadero callejón sin salida.

Tras el trabajo de Maxwell y Boltzmann, Gibbs introdujo el concepto de sistema “mixing”, usando el símil de una gota de aceite en un fluido inmiscible, una pequeña región en el espacio de fases que simule la gota de aceite, la evolución dinámica contribuiría a llenar todo el espacio de fases. Esta idea lleva consigo que para un sistema dinámico dado, dos puntos suficientemente próximos se separarían de modo exponencial al cabo de un cierto lapso de tiempo. Este concepto viene ligado a la noción de dependencia sensible a las condiciones iniciales que está en la base de la dinámica caótica en dinámica no lineal y que lleva a definir los llamados exponentes de Lyapunov [14]. El concepto de exponente de Lyapunov indica que si un sistema dinámico posee algún exponente de Lyapunov positivo entonces estos puntos o condiciones iniciales se separarían de modo exponencial y a este tipo de sistemas se les llama sistemas caóticos, ya que la predicción de la evolución del sistema a largo plazo es imposible.

En este sentido destacan científicos como George Birkhoff (1884–1944) quien propuso el teorema ergódico, que posteriormente fue probado por el matemático alemán Eberhard Hopf (1902-1983) utilizando el hecho de la ergodicidad de las trayectorias en superficies de curvatura constante negativa que había apuntado unos años antes el matemático francés Jacques Hadamard. Sin embargo, estos resultados no tuvieron apenas impacto en la fundamentación de la mecánica estadística del no equilibrio.

La importancia del gas de Lorentz, que ya se mencionó anteriormente al hablar de Max Born, es que muestra propiedades físicas termodinámicas, es ergódico y posee un exponente de Lyapunov positivo. El gran logro del matemático ruso afincado en los Estados Unidos de América, Yakov Sinai, quien recibió el Premio Abel en 2014, fue mostrar la conexión existente entre el conjunto clásico de Boltzmann-Gibbs para un gas ideal y un billar de Hadamard caótico.

Ideas provenientes de la teoría del caos han sido usadas para la fundamentación de la mecánica estadística, encontrándose conexiones profundas entre las propiedades dinámicas de un sistema, tales como sus exponentes de Lyapunov y sus propiedades de transporte. Los conocimientos tanto de la mecánica estadística del no equilibrio como de la dinámica no lineal se hacen indispensables para poder comprender trabajos sobre estados de no equilibrio. A pesar de numerosos esfuerzos y de las aparentes nuevas perspectivas para fundamentar la mecánica estadística del no equilibrio en base a la teoría del caos, las extraordinarias dificultades conceptuales de tal empresa han impedido hasta ahora su consecución.

3.4 LA SENDA HACIA EL CAOS A TRAVÉS DE LOS OSCILADORES NO LINEALES

La construcción de la dinámica no lineal es como la de un gran río al que contribuyen numerosos afluentes. Uno de estos afluentes es el estudio de los osciladores no lineales. Entre los pioneros en esta vía se encuentra el físico inglés John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), motivado por su interés en comprender la física de los instrumentos musicales. Para este tipo de sistemas, una primera aproximación basada en el uso de osciladores lineales no es efectiva porque los instrumentos reales no producen un tono simple, como le ocurre a un oscilador lineal, de modo que es preciso añadir fricción por un lado y términos no lineales de recuperación por otro. Es decir, es necesario usar una fuerza elástica diferente de la que proporciona la ley de Hooke: *ut tensio sic vis*. Mediante un inteligente uso de los elementos dinámicos básicos del problema, Lord Rayleigh creó modelos que explicaban el sonido emitido por los instrumentos musicales. En su famoso libro *The Theory of Sound* publicado en 1877, Rayleigh introdujo una serie de métodos bastante generales como la noción de ciclo límite, que es un movimiento periódico que tiene el sistema físico con independencia de las condiciones iniciales. Posteriormente fueron importantes los desarrollos del ingeniero eléctrico holandés Balthasar van der Pol (1889-1959), quien en 1927 encontró un ciclo límite extremadamente importante en el modelo matemático de un oscilador no lineal de una válvula electrónica de vacío, de las usadas para construir radios antes de la invención del transistor.

El ingeniero alemán Georg Duffing (1861-1944) es conocido fundamentalmente por su modelo de oscilador no lineal simétrico con una no linealidad cúbica: el oscilador de Duffing. Este modelo es un modelo paradigmático para el estudio de muchos fenómenos en dinámica no lineal. La teoría fue posteriormente desarrollada a finales de los años cuarenta, justo después de la II Guerra Mundial, por dos matemáticos ingleses de la Universidad de Cambridge: Mary L. Cartwright (1900-1998) y John E. Littlewood (1885-1977) que demostraron que muchos de los experimentos de los físicos experimentales y muchas de las conjeturas de los físicos teóricos se obtenían directamente del análisis de las ecuaciones diferenciales del movimiento. De hecho, estos matemáticos habían seguido las ideas de George Birkhoff, y a su vez sus resultados condujeron al trabajo del americano Norman Levinson (1912-1975), quien a su vez suministró la base para la construcción de la herradura de Smale.

La escuela de pensamiento no lineal en Rusia, fue iniciada por el trabajo de Leonid I. Mandelstam (1879-1944) en osciladores no lineales, quien se había formado con el físico alemán August Kundt (1839-1894) en Estrasburgo, muy conocido por sus trabajos en acústica y el tubo de Kundt. Esta línea de trabajo fue proseguida por Alexander A. Andronov (1901-1952) y por Lev S. Pontryagin (1908-1988), quienes introdujeron la noción de estabilidad estructural de un sistema de ecuaciones, concepto asociado al de bifurcaciones de sistemas dinámicos.

El concepto de bifurcación de ciclos límite que había sugerido Poincaré en 1892, fue probado por Andronov en 1930 y por Hopf en 1940, y recibe el nombre de bifurcación de Andronov-Hopf, aunque es más conocido simplemente como bifurcación de Hopf. Esta escuela continuó posteriormente en los años 50 y 60 en Gorki, actual Nizhnii Novgorod, obteniéndose resultados paralelos al desarrollo de la teoría en Occidente. Allí se desarrollaron muchos métodos de la física no lineal bajo el paradigma de los osciladores no lineales y de las auto-oscilaciones.

En Japón, la teoría de osciladores no lineales y sus aplicaciones a la radiofísica se desarrollaron en la escuela del ingeniero japonés Chihiro Hayashi (1911-1986) en la Universidad de Kyoto. Hayashi hizo notables contribuciones al estudio de los osciladores no lineales y sus aplicaciones prácticas en ingeniería eléctrica, publicando en 1964 su famoso libro *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* [15].

En 1961 se produce un hecho destacable por parte del ingeniero japonés Yoshisuke Ueda, que era estudiante de doctorado de Chihiro Hayashi. Ueda estudiaba la dinámica de varios osciladores no lineales tales como el oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, y es precisamente en un modelo particular de este último donde aparentemente encontró por primera vez soluciones de las que ahora mismo designamos por soluciones caóticas.

3.5 LA DINÁMICA DE POBLACIONES Y LA APLICACIÓN LOGÍSTICA

La aplicación logística fue popularizada por Robert M. May tras la publicación del trabajo "Simple mathematical models with very complicated dynamics" [16], y constituye uno de los paradigmas del comportamiento caótico de los sistemas dinámicos no lineales. A pesar de su aparente sencillez, muestra una dinámica compleja incluyendo el comportamiento caótico. Su formulación deriva de la ecuación logística, introducida en 1838 como un modelo de crecimiento en dinámica de las poblaciones por el matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) en su escrito "*Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*". La aplicación cuadrática, muy similar a la aplicación logística, también había sido profusamente estudiada en otros contextos por el francés Gaston Julia (1893-1978), por el húngaro-americano John von Neumann (1903-1957), el polaco-americano Stanislaw Ulam (1909-1984) y por el americano Norbert Wiener (1894-1964).

Fig. 16. El matemático y físico americano James Yorke.

Uno de los artículos de enorme influencia en el campo fue sin duda el artículo anteriormente citado de Edward Lorenz *Deterministic nonperiodic flow* [12]. El matemático y físico estadounidense de la Universidad de Maryland Prof. James A. Yorke (Fig. 16) reconoció inmediatamente las implicaciones de tal descubrimiento, así como sus repercusiones filosóficas, dando a conocer a la comunidad científica el trabajo de Lorenz.

Posteriormente introdujo el término *caos* en el artículo que lleva por título *Period Three Implies Chaos* [17] publicado junto con su estudiante de doctorado Tien-Yien Li en la revista The American Mathematical Monthly en 1975. Unos años antes, en 1963, el matemático ucraniano A. N. Sharkovskii había demostrado un teorema (conocido ahora como teorema de Sharkovskii), que fue publicado en ruso en la revista Ukrainian Mathematics Journal, y donde el resultado de Li y Yorke aparecía como un corolario. Sin embargo una de las novedades fundamentales en el artículo de Li y Yorke es que en él decían que la aparición de una órbita de período tres implicaba la aparición de todas las demás, incluidas las órbitas caóticas, mientras que Sharkovskii no hablaba de las órbitas caóticas.

Posteriormente, el físico americano Mitchell Feigenbaum descubrió la existencia de exponentes críticos universales que caracterizaban la transición del movimiento periódico al caótico en aplicaciones unidimensionales con la propiedad de la duplicación de periodo. Simultáneamente, se produjo el mismo descubrimiento por parte de los franceses Pierre Coullet y Charles Tres-ser, que en ese momento eran estudiantes de doctorado en la Universidad de Niza, y por los físicos alemanes de la Universidad de Marburg Siegfried Grossmann y Stefan Thomae.

El concepto de grupo de renormalización había sido aplicado anteriormente en el campo de la mecánica estadística para estudiar los llamados fenómenos críticos y las transiciones de fase y su desarrollo en estos campos había hecho merecedor del Premio Nobel de Física al americano Kenneth Wilson en 1982. Dichos métodos fueron aplicados por Feigenbaum y otros para desarrollar la teoría matemática de las bifurcaciones de duplicación de período. Hasta comienzos de los años ochenta la mayor parte de los trabajos eran de naturaleza teórica o fruto de exploraciones numéricas con ordenadores. En cualquier caso, siempre se pensó en las consecuencias importantes que esos descubrimientos teóricos tenían para la física, así como la posible importancia para la comprensión de la transición a la turbulencia de los fluidos.

El físico francés Albert Libchaber, actualmente en la Rockefeller University en Neva York, realizó uno de los primeros experimentos donde se mostró el fenómeno de duplicación de periodo al estudiar celdas convectivas de Rayleigh-Bénard a finales de los años setenta. El físico americano Robert Shaw de la Universidad de California en Santa Cruz, realizó un experimento sencillo y de especial relevancia con un simple grifo goteante. Otro hito experimental importante fue llevado a cabo por los físicos americanos Jerry Gollub y Harry Swinney, que también encontraron el fenómeno de duplicación de periodo al reproducir el experimento clásico de Taylor-Couette de movimiento de fluidos.

3.6 DIMENSIONES FRACCIONARIAS, FRACTALES Y CAOS

Existen muchas formas geométricas complejas en la naturaleza tales como las líneas de las costas, el cauce de los ríos, las formas biológicas e incluso las curvas complejas de los mercados financieros. Una característica común en todas ellas es la autosemejanza. Esta es la propiedad que consiste en que cuando una parte de esta forma geométrica se aumenta aparece el mismo tipo de estructura. Para caracterizar los objetos con esta propiedad universal se hace necesaria la utilización de dimensiones fraccionarias, lo que llevó al físico y matemático Benoit Mandelbrot (Fig. 17) a denominar a dichos objetos “fractales”. A él se debe el notable influjo que supo dar a la geometría fractal, recogiendo el enorme trabajo que habían realizado matemáticos anteriores a él tales como el francés Gaston Julia, el sueco Helge von Koch, el polaco Waclav Sierpinski, así como los trabajos sobre dimensiones del alemán Felix Hausdorff y del ruso Abram S. Besikovich.

Fig. 17. Benoit Mandelbrot (1924-2010). Al fondo aparece el famoso conjunto que lleva su nombre.

La noción de dimensión es fundamental a la hora de medir los objetos geométricos. Existen diversas formas de definir el concepto de dimensión, pero está claro que un punto tiene dimensión cero, una línea recta tiene dimensión uno, un plano tiene dimensión dos y un cubo tiene dimensión tres. Sin embargo y a pesar de lo extraño que nos parezca, existen objetos geométricos cuyas dimensiones no son un número entero, resultando ser un valor fraccionario.

Esta es una noción simple de lo que se entiende por dimensión fractal o dimensión de Hausdorff, de tal modo que el conjunto de Cantor, que se mencionó anteriormente tiene una dimensión de $\log 2/\log 3 = 0.63$, el conjunto de Koch tiene una dimensión de $\log 3/\log 4 = 1.26$ y el conjunto de Sierpinski tiene una dimensión de $\log 3/\log 2 = 1.585$. Todos ellos son conjuntos fractales autosemejantes, ya que se obtienen mediante una regla iterativa de modo que la estructura básica se repite a todas las escalas.

El conjunto de Koch (Fig. 18) fue ideado por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924), y se construye de la siguiente manera: Comenzamos con un intervalo que dividimos en tres trozos iguales, y en el trozo de la mitad construimos un triángulo de lados iguales tal y como aparece en la figura.

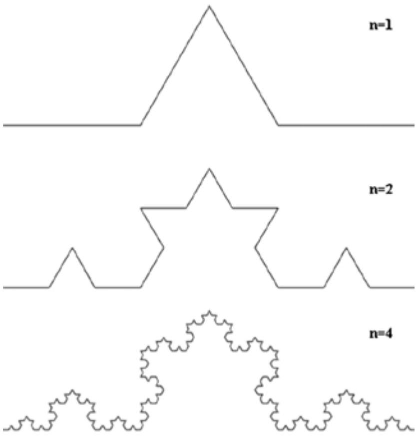

Fig. 18. Conjunto fractal de Koch.

A continuación, repetimos la misma estrategia en cada uno de los cuatro trozos, dando lugar a la figura del medio, y el proceso lo repetimos en sucesivas iteraciones dando lugar a una figura que se asemeja a un copo de nieve. El conjunto de Sierpinski se debe al matemático polaco Wacław Sierpinski (1882-1969) y se construye de la siguiente manera. Consideramos un triángulo de lados iguales, como el que aparece en la Fig. 19. A continuación le quitamos el triángulo blanco de su interior y en cada uno de los triángulos completos que le quedan le quitamos el triángulo blanco y así sucesivamente, dando lugar finalmente tras sucesivas iteraciones al triángulo de Sierpinski, que es un objeto fractal autosemejante.

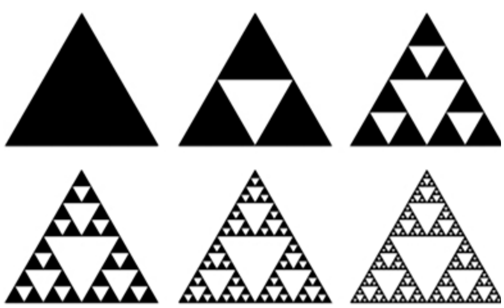

Fig. 19. Conjunto de Sierpinski.

Aunque en principio la geometría fractal y la dinámica no lineal sean dos disciplinas que aparentemente no tengan nada que ver, sin embargo, como ya se ha apuntado anteriormente, el caos y los fractales están íntimamente ligados. Una de las principales ideas se debe a que asociado a la noción de caos existe la del atractor caótico que constituye un objeto geométrico de naturaleza fractal que vive en el espacio de las fases, de modo que resulte imposible hablar de caos sin hablar de fractales y viceversa.

4. SOBRE LOS ORÍGENES DE LA COMPLEJIDAD

A comienzos del siglo XX se producen desarrollos fundamentales en dos campos de investigación novedosos en Física que suponen una revolución conceptual enorme en el desarrollo de la ciencia. Por un lado, la teoría de la relatividad que nos ayudó a entender el mundo a escalas cósmicas y la mecánica cuántica que supuso el conocimiento y exploración del mundo microscópico a nivel atómico y subatómico. Por otro lado, durante la segunda mitad del siglo XX, hemos podido ver cómo han emergido como unos de los campos de actividad en la investigación muy fructíferos, la dinámica no lineal y la teoría del caos, así como paralelamente se iba desarrollando la disciplina de la complejidad, o la física de los sistemas complejos, con un enorme empuje, incluyendo nuevas líneas de investigación y aportando una nueva forma de hacer las cosas.

Hablar de los orígenes de las cosas nunca es fácil y desde luego los orígenes de la complejidad no son una excepción. A pesar de que para muchos sea una noción relativamente nueva, ya que su uso se ha generalizado en los últimos años, sus orígenes se remontan a épocas muy anteriores. A la hora de hacer una exploración de ciertas ideas y actividades que han contribuido al desarrollo de este conjunto de ideas que abarca la complejidad, cabe destacar al neurocientífico americano Warren McCulloch (Fig. 20), quien junto con el matemático Walter Pitts propuso en 1943 el conocido modelo de neurona de McCulloch-Pitts a fin de analizar propiedades del cerebro. También McCulloch jugó un papel destacado en la organización en los años cuarenta de las Macy Conferences en Nueva York, con el apoyo de la Macy Foundation, en donde participaron numerosos científicos de diversas disciplinas en un ambiente altamente interdisciplinar, entre los que podemos citar al psiquiatra William Ross Ashby, al antropólogo Gregory Bateson; a los matemáticos John von Neumann, Walter Pitts y Norbert Wiener, al biofísico Max Delbrück, al teórico de la información Claude Shannon y al mismo Warren McCulloch como moderador.

Fig. 20. Warren McCulloch (1898-1969).

Por otro lado, resulta de especial interés la figura del científico americano Warren Weaver (1894-1978) (Fig. 21), que entre otras cosas fue coautor junto con Claude E. Shannon del famoso libro *The Mathematical Theory of Communication* publicado por The University of Illinois Press en 1949.

Fig. 21. Warren Weaver (1894-1978).

Pues bien, en 1948 publicó un interesantísimo artículo, considerado fundacional, titulado *Science and Complexity* [18] en la revista americana American Scientist. De hecho, utilizó material que había sido publicado en 1947 y lo más importante es que resulta premonitorio de muchos aspectos de la complejidad de los que se vienen hablando en los últimos años.

4.1. Física y emergencia

Una de las ideas fundamentales en complejidad es la idea de emergencia. En física existen numerosos ejemplos de sistemas donde se hacen evidentes las propiedades emergentes, como por ejemplo la superconductividad y la superfluidez. Cabe además señalar que existe toda una investigación de carácter fundamental que pretende investigar los fenómenos complejos, donde en lugar de acudir al reduccionismo, que ha sido el enfoque que ha regido la evolución de la Física en los últimos años, el motor primordial de esta investigación es la emergencia. Una cuestión fundamental es que estos fenómenos complejos emergentes no se derivan de las leyes microscópicas subyacentes, aunque por supuesto las cumplen.

Algunas de estas ideas fueron expuestas de una manera magistral por el físico Philip W. Anderson, Premio Nobel de Física de 1977, en un artículo publicado en la revista Science en 1972 y que lleva por título *More is different* [19], donde deja muy claro la idea de que:

"A cada nivel de complejidad aparecen propiedades completamente nuevas, y la comprensión de estos nuevos comportamientos requiere investigación que entiendo tan fundamental en su naturaleza como cualquier otra."

Philip W. Anderson introduce algunos aspectos de la física de los sistemas complejos en el artículo titulado *Physics: The Opening to Complexity* [20], donde señala entre otras cosas:

> *"Pero otro gran número se dedican a otro tipo de investigación fundamental: investigación de fenómenos que son demasiado complejos de ser analizados de modo sencillo por simple aplicación de las leyes fundamentales. Estos físicos están trabajando en otra frontera entre lo misterioso y lo entendido: la frontera de la complejidad. En esta frontera, el lema no es el reduccionismo sino la emergencia. Los fenómenos complejos emergentes bajo ningún concepto violan las leyes microscópicas, sin embargo, no aparecen como consecuencias lógicas de estas leyes."*

En relación a la física emergente cabe mencionar también a Robert Laughlin, Premio Nobel de Física de

1998 y profesor en la Universidad de Stanford, quien proponía a sus mejores estudiantes el problema de deducir las leyes de la superfluidez a partir de primeros principios, a sabiendas de que es imposible. Precisamente para mostrar la importancia de las propiedades emergentes en física, que constituye el argumento fundamental de su libro *A Different Universe: Reinventing physics from the botton down* [21].

El libro se fundamenta en un interesante artículo titulado *The Science of Everything* [22], donde entre las muchas cuestiones que señala podemos destacar las dos siguientes:

> *"La tarea central de la física teórica de nuestro tiempo ya no es escribir las ecuaciones últimas sino más bien catalogar y entender el comportamiento emergente en sus muchas formas incluyendo potencialmente a la misma vida. Llamamos a esta física de nuestro siglo el estudio de la materia compleja adaptativa. Para mejor o peor estamos ahora presenciando una transición de la ciencia del pasado, tan íntimamente ligada al reduccionismo, al estudio de la materia compleja adaptativa, firmemente basada en el experimento, con la esperanza de suponer un salto para nuevos descubrimientos, nuevos conceptos y nueva sabiduría."*

> *"El final del reduccionismo es una llamada para todos aquellos que estamos preocupados de la salud de las ciencias físicas para afrontar la verdad de que en muchos casos el ideal reduccionista ha llegado a sus límites como principio motor. Más que una teoría del todo, parece que nos enfrentamos a una jerarquía de teorías de las cosas, cada una de ellas emergiendo de su padre y evolucionando hacia sus hijos a medida que la escala de la energía disminuye. El fin del reduccionismo no es, sin embargo, el fin de la ciencia, ni siquiera el fin de la física teórica."*

De hecho, cuando uno mira al mundo lo que uno observa es de una complejidad asombrosa. Si bien, no existen por el momento leyes de la complejidad, tal y como existen las leyes de la física, los autores antes citados enumeran una serie de lecciones sencillas sobre complejidad que se derivan del análisis y la observación de numerosos sistemas complejos que existen en el universo.

El físico húngaro Tamas Vicsek del Departamento de Biofísica de la Universidad Eötvös de Budapest argumenta en un ensayo publicado en Nature [23] que cuando un concepto no está bien definido, como es el caso de la complejidad, se corre el peligro de abusar de él. Es cierto que en muchas ocasiones se puede usar el término de modo indiscriminado como signo de modernidad. No obstante, la idea fundamental que se deriva de este ensayo es que las leyes que describen el comportamiento de los sistemas complejos son cualitativamente diferentes de las que gobiernan las unidades de las que están compuestos.

4.2. Complejidad y fronteras de la física

Podríamos de alguna manera visualizar los diferentes ingredientes de la Física en términos de escalas, de tal modo que podríamos situar a la cosmología en la zona de las grandes escalas, a la física de partículas elementales en la zona de las escalas pequeñas y entre medias existe una gran zona intermedia, donde podrían situarse muchos de los aspectos relacionados con la física de los sistemas complejos. Aquí cabría un amplio espectro de temas como transiciones de fase, fenómenos fuera del equilibrio, fenómenos de auto-organización, formación de patrones, sistemas heterogéneos, fenómenos biológicos de distintas naturalezas, física del procesamiento de la información, etc.

Muchos consideran a la física como el fundamento de las otras ciencias básicas, ya que todos los objetos naturales que nos rodean, incluidos nosotros mismos, están hechos de las mismas partículas elementales cuyas interacciones conoce e investiga la física. En gran medida, el extraordinario éxito de la aproximación reduccionista de la física actual se fundamenta en el concepto de sistema aislado. Sin embargo, aparentemente no existe ningún sistema físico o biológico que sea aislado. Los sistemas biológicos son abiertos y en el mundo real el entorno importa tanto como las leyes. La aproximación física tiende a ignorar los elementos cruciales de la emergencia en la complejidad biológica, de tal modo que se produce una estructura jerárquica, en donde existen unas leyes fenomenológicas en cada uno de los niveles de la jerarquía. Los niveles más altos emergen de las leyes de la física subyacentes estableciendo posibles vías de crear la funcionalidad biológica, pero estas leyes son independientes de la física subyacente, lo cual explica el hecho de que los biólogos no necesiten estudiar, en principio, ni teoría cuántica de campos, ni el modelo estándar de las partículas elementales, ni física nuclear.

4.3. Complejidad y ciencias de la vida

El enorme desarrollo de la actividad científica en los últimos años ha provocado el que muchas disciplinas hayan encontrado ámbitos de aplicación en otras ciencias. Esto es lo que, entre otros muchos casos, ha ocurrido con la aplicación de disciplinas como la física, las matemáticas y la ingeniería en el desarrollo de algunos aspectos de las ciencias de la vida, en las que podríamos incluir no solamente a la biología, sino también a las ciencias biomédicas y a la biotecnología. Pudiera pensarse que se trata de una simple moda y de algo que por alguna razón venga ocurriendo desde hace tan solo unos pocos años. Sin embargo, es importante señalar que la influencia de estas ciencias y sus contribuciones a las ciencias de la vida son muy antiguas, aunque frecuentemente muchas de estas contribuciones no se hayan trasmitido adecuadamente a los nuevos estudiantes universitarios, llevando a la percepción falsa de que este interés sea sólo reciente.

Son numerosos los eminentes físicos, incluidos Premios Nobel, cuyo trabajo ha tenido relación en algunos de los aspectos relacionados con las temáticas de la complejidad. Entre ellos destacan: Erwin Schrödinger, Premio Nobel de Física de 1933 y conocido sobre todo por sus contribuciones a la mecánica cuántica, que fue el autor del influyente libro *¿Qué es la vida?* publicado en 1944. El físico Max Delbrück (1906-1981), Premio Nobel de Medicina en 1969 por sus trabajos pioneros en Biología Molecular. Philip W. Anderson, Premio Nobel de Física de 1977, muy conocido por sus trabajos en física de la materia condensada, ha jugado también un papel relevante en el desarrollo de algunas ideas relacionadas con la complejidad, sobre todo con la emergencia. El físico Murray Gell-Man, Premio Nobel de Física de 1969; quien acuño el termino quark, he venido desarrollando su trabajo en los últimos años en el Instituto de Santa Fe de Sistemas Complejos.

Otro personaje fundamental en esta relación que estamos haciendo es el matemático Norbert Wiener, profesor en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), quien fue uno de los fundadores de la Cibernética, y supo crear un entorno alrededor de él altamente interdisciplinario con numerosas aplicaciones a ciencias de la vida. Podríamos seguir citando a numerosos físicos, tales como Nicholas Metropolis, George Gamow, Leo Szilard, Jack Cowan o Geoffrey West, entre otros.

Entre los modelos matemáticos más utilizados en neurociencia computacional, que pretenden analizar el cerebro como un sistema complejo, se encuentra el modelo de Hodgkin-Huxley. En el año 1952 Alan L. Hodgkin y Andrew. F. Huxley (Fig. 22) escribieron una serie de cinco artículos [24] en los que describieron los experimentos que realizaron para determinar las leyes

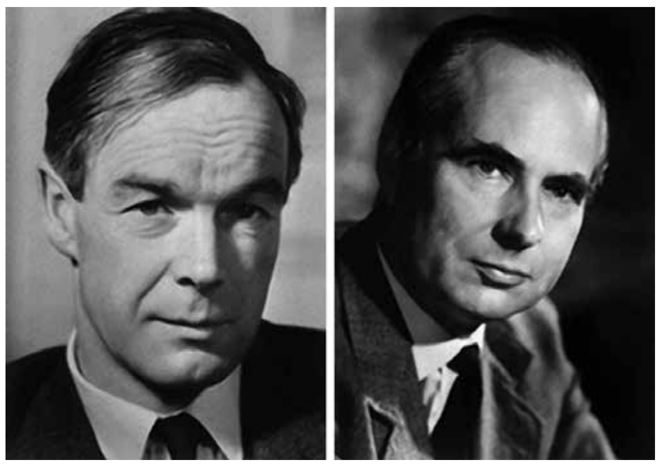

Fig. 22. Alan L. Hodgkin y Andrew. F. Huxley recibieron el Premio Nobel de Medicina en 1963 por su modelo neuronal.

del movimiento de los iones en las células nerviosas durante un potencial de acción. Formularon un modelo matemático para explicar el comportamiento de las células nerviosas de un calamar gigante. Es notable que este modelo fuera formulado mucho antes de la existencia de los microscopios electrónicos y de las simulaciones por ordenador, y permitió a los científicos el conocimiento básico del funcionamiento de las células nerviosas sin necesidad de conocer cómo se comportaban las membranas. Recibieron el Premio Nobel en Fisiología o Medicina en 1963, junto con Sir John C. Eccles por sus descubrimientos referentes a los mecanismos iónicos implicados en la excitación y la inhibición en las porciones periféricas y centrales de la membrana de la célula nerviosa.

5. CONCLUSIONES

Una de las principales ideas que habría que destacar es que a pesar de que la física de sistemas complejos suponga ahora mismo una de las fronteras de la investigación física actual, las ideas de la complejidad se remontan a comienzos del siglo XX, y se han venido desarrollando por diversos caminos hasta llegar a la visión que tenemos de ellas hoy día, si bien su evolución y desarrollo a lo largo del presente siglo XXI se encuentran bastante abiertos.

La idea de emergencia frente al reduccionismo es otra de las ideas fundamentales en la física de los sistemas complejos. Algunas de estas ideas sobre emergencia se remontan incluso hasta los orígenes de la termodinámica, pero aparecen en diversos fenómenos que estudia la ciencia. Se mencionan de una manera especial conceptos como el caos y los fractales que han supuesto un mecanismo catalizador de muchas de las ideas alrededor de las cuales se mueve la complejidad. Sin duda la idea de la interdisciplinariedad es de la mayor importancia en este contexto, ya que como se ha apuntado muchas ideas asociadas a la complejidad integran disciplinas, así como a romper las tradicionales barreras disciplinares.

En todo momento se ha querido dejar constancia de que muchas de estas ideas han estado latiendo en el pensamiento y la acción de muchos físicos en el pasado y en el presente, que han estado abiertos a problemas sobre la complejidad de la vida y de la naturaleza, incluidos algunos premios Nobel.

En los últimos años, numerosos científicos han contribuido al desarrollo de la teoría del caos. En el año 2003 el Japan Prize, que concede cada año el gobierno japonés a través de la Fundación de la Ciencia y Tecnología del Japón, se dedicó a la Ciencia y la Tecnología de la Complejidad. El premio fue conseguido por los científicos Benoit Mandelbrot por sus aportaciones a los fractales y James A. Yorke por sus contribuciones a la fundamentación de la teoría del caos. Este premio supuso un aldabonazo para la comunidad de científicos que trabajan en estos campos, ya que por primera vez se concedía un premio de esta envergadura a científicos trabajando en temas de ciencias de la complejidad. Asimismo, en el año 2014 tuvo lugar en la Universidad Rey Juan Carlos la investidura de James A. Yorke como Doctor Honoris Causa.

Tras los esfuerzos de numerosos científicos, tal y como acabamos de mostrar, todo el campo de investigación que abarcan la dinámica no lineal, la teoría del caos y la complejidad sigue desarrollándose e influyendo en numerosas disciplinas, con unas grandes perspectivas de futuro.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Manuel de León; Miguel A.F. Sanjuán (2010): *Las Matemáticas y la Física del Caos.* Madrid. Los libros de la Catarata y CSIC.
2. James Gleick (2012): *Caos: La creación de una ciencia.* Editorial Crítica.
3. Lenny Smith (2011): *Caos: una breve introducción.* Alianza Editorial.
4. Ian Stewart (2012): *¿Juega Dios a los dados?: La nueva matemática del caos.* Editorial Planeta.
5. Charles Darwin. *The Origin of Species.* 1859. http://www.talkorigins.org/faqs/origin.html
6. D. D. Nolte (2010): *The tangled tale of phase space.* Physics Today 63 (4), 33–38
7. Una interesante y reciente discusión de la indeterminación clásica en el contexto de la mecánica cuántica puede verse en: Manabendra Nath Bera et al. (2017). *Randomness in quantum mechanics: philosophy, physics and technology.* Rep. Prog. Phys. 80 124001
8. Max Born (1955): *Is Classical Mechanics in Fact Deterministic?* Phys. Blätter 11 (9): 49
9. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands (1963): The Feynman Lectures on Physics. Vol. I *Mainly Mechanics, Radiation and Heat,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
10. M. Mikael Rågstedt. *From Order to Chaos: The Prize Competition in Honour of King Oscar II.* http://www.mittag-leffler.se/library/prize-competition
11. H. Scott Dumas (2014): *The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory.* World Scientific.
12. E. N. Lorenz (1963). *Deterministic Nonperiodic Flow.* Journal of Atmospheric Sciences 20, 130-148.
13. Benoit B. Mandelbrot (2014): *The Fractalist: Memoir of a Scientific Maverick.* Vintage.
14. Información sobre exponentes de Lyapunov puede obtenerse en: https://es.wikipedia.org/wiki/Exponente_de_Lyapunov

15. Chihiro Hayashi (2014): *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* Princeton University Press. 2014.
16. Robert M. May. (1976): *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*. Nature 261, 459
17. Tien-Yien Li; James A. Yorke (1975). *Period Three Implies Chaos.*The American Mathematical Monthly 82, 985-992.
18. Warren Weaver (1948): *Science and Complexity*. American Scientist 36(4), 536-544. https://www.jstor.org/stable/pdf/27826254.pdf
19. Philip W. Anderson (1972): *More is different.* Science 177, 393-396. http://bit.ly/2qmKnt2
20. Philip W. Anderson (1995): *Physics: The Opening to Complexity.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 92, 6653-6654. http://www.pnas.org/cgi/reprint/92/15/6653
21. Robert Laughlin (2005): *A Different Universe: Reinventing Physics from the botton down.* Basic Books.
22. R. B. Laughlin and David Pines (2000): *The Science of Everything.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 97, 28-3. http://www.pnas.org/cgi/reprint/97/1/28
23. Tamas Vicsek (2002): *The bigger picture.* Nature 418, 131. https://arxiv.org/abs/1006.5944
24. Más información sobre el modelo de Hodking-Huxley y enlaces a sus artículos puede encontrarse en: https://en.wikipedia.org/wiki/Hodgkin%E2%80%93Huxley_model